

Équations différentielles (Exercices)

$$a(t) = -t \quad A(t) = -\frac{t^2}{2}$$

① Résoudre $y' - t y = 2t$ $b(t) = 2t$

Eq. homogène $y' - t y = 0$ $y(t) = C e^{\frac{t^2}{2}}, C \in \mathbb{R}$

Sol. particulière de la forme $y(t) = C(t) e^{\frac{t^2}{2}}$

C primitive de $t \mapsto b(t) e^{A(t)} = 2t e^{-\frac{t^2}{2}}$

$e^{-\frac{t^2}{2}} \xrightarrow{\text{der.}} -t e^{-\frac{t^2}{2}}$

$$C(t) = -2 e^{-\frac{t^2}{2}} + K, K \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = -2 + K e^{\frac{t^2}{2}}, K \in \mathbb{R}$$

② Résoudre $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$ $a(t) = 1$ $b(t) = \frac{1}{1+e^t}$
 $A(t) = t$

Eq. homogène $y' + y = 0$ $y(t) = C e^{-t}, C \in \mathbb{R}$

Sol. part. de la forme $y(t) = C(t) e^{-t}$

C primitive de $t \mapsto b(t) e^{At} = \frac{e^t}{1+e^t}$

$\ln(u) \xrightarrow{\text{dér.}} \frac{u'}{u}$

$C(t) = \ln(1+e^t) + K$ où $K \in \mathbb{R}$

$y(t) = e^{-t} \ln(1+e^t) + K e^{-t}$ où $K \in \mathbb{R}$

$$a(t) = \frac{t-1}{t} = 1 - \frac{1}{t}$$

$$b(t) = t^2$$

$$A(t) = t - \ln t$$

③ Résoudre $y' + \frac{t-1}{t} y = t^2$

Éq. homogène $y' + \frac{t-1}{t} y = 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= C e^{-A(t)} \\ &= C e^{-t + \ln t} \\ &= C t e^{-t} \end{aligned}$$

$$C \in \mathbb{R}$$

Sol. part. de la forme $y(t) = C(t) t e^{-t}$

C primitive de $t \mapsto b(t) e^{A(t)} = t^2 e^{t - \ln t} = t e^t$

IPP : $C(t) = \int \underbrace{t}_{v'} \underbrace{e^t}_{u'} = [t e^t] - \int e^t = t e^t - e^t + K = (t-1) e^t + K, K \in \mathbb{R}$

$v' = 1 \quad u' = e^t$

$$y(t) = t(t-1) + K t e^{-t}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Exercice bonus

Donner une équation différentielle dont les solutions sont :

$$t \mapsto \frac{C + \arctan(t)}{t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Solutions : martintraussard.fr