

Équations différentielles du second ordre

Équation différentielle linéaire d'ordre 2

Coefficients constants $y'' + \underline{a}y' + \underline{b}y = f(x)$ $\begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ f \text{ continue} \end{cases}$

Éq. homogène : $y'' + ay' + by = 0$

Lien avec les suites $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$

Éq. caract. $X^2 = aX + b$

Solutions $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda x_1^n + \mu x_2^n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda x_0^n + \mu n x_0^n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$x_1 = r e^{i\theta}, x_2 = r e^{-i\theta} \rightarrow r^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Résolution de l'éq. homogène $y'' + ay' + by = 0$

Équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$

r_1, r_2 $\Delta > 0$ $y: t \mapsto e^{r_1 t}$ et $y: t \mapsto e^{r_2 t}$ solutions

$$y' = r_1 y \quad y'' = r_1^2 y \quad y'' + ay' + by = y(r_1^2 + ar_1 + b) = 0$$

$$y: t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ solutions}$$

y solutⁿ, on pose $f: t \mapsto \frac{y(t)}{e^{r_1 t}}$ $y(t) = f(t)e^{r_1 t}$

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = \underbrace{\left[f''(t) + (2r_1 + a)f'(t) \right]}_{=0} \underbrace{\frac{e^{r_1 t}}{e^{r_1 t}}}_{=1} = 0$$

$$f(t) = \mu e^{r_2 - r_1 t} + \lambda \quad \leftarrow f' \quad y(t) = \mu e^{r_2 t} + \lambda e^{r_1 t}$$

$\Delta = 0$ $y(t) = (\lambda + \mu x) e^{\lambda t}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\Delta < 0$ Racines $\lambda_{1,2} = \lambda \pm i\omega$

$$y(t) = e^{\lambda t} (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t))$$

Exemple $y'' + 2y' + 10y = 0$

Eq. carac. $x^2 + 2x + 10 = 0$ $\Delta = 4 - 40 = -36 = (6i)^2$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i$$

$$y(t) = e^{-t} (\lambda \cos(3t) + \mu \sin(3t))$$

Équation complète $y'' + ay' + by = f(x)$ $\begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ f \text{ continue} \end{cases}$

Solution particulière y_0 $y_0'' + ay_0' + by_0 = f(x)$

$(y - y_0)'' + a(y - y_0)' + b(y - y_0) = 0$ $\leftarrow$ eq. homogène

Variation de la constante Plus compliqué

f polynôme $\rightarrow y_0$ polynôme

$\vdots$

À vous de jouer!

① Résoudre $y'' + \omega^2 y = 0$ où $\omega \in \mathbb{R}$

② Résoudre $y'' - 2y' - 3y = 0$

③ Résoudre $y'' - 2y' + y = x$