

Équations différentielles du second ordre (Exercices)

① Résoudre $y'' + \omega^2 y = 0$ où $\omega \in \mathbb{R}$

Eq carac. $x^2 + \omega^2 = 0$

$\omega = 0$ 1 solution $\lambda = 0$ $y(t) = \lambda e^{\lambda t} + \mu t e^{\lambda t} = \lambda + \mu t$
(affines)

$\omega \neq 0$ $\lambda_{1,2} = 0 \pm i\omega$

$\lambda \pm i\omega$

$y(t) = e^{\lambda t} (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t))$

$a \cos x + b \sin x$

$\hookrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi)$

$y(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$
 $= C \cos(\omega t - \varphi)$

② Résoudre $y'' - 2y' - 3y = 0$

Eq. caract. $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$y(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{3t}$$

③ Résoudre $y'' - 2y' + y = t$

Éq. homogène $y'' - 2y' + y = 0$

Éq. carac. $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Sol: $y(t) = \lambda e^t + \mu t e^t$

Sol. particulière $y(t) = mt + p$ $y' = m$
 $y'' = 0$

$y'' - 2y' + y = t \Leftrightarrow -2m + mt + p = t \Leftrightarrow \underline{mt} + (\underline{p - 2m}) = \underline{t}$

$m = 1$
 $p - 2m = 0$

$p = 2m = 2$

$y_0(t) = x + 2$

Solutions: $\lambda e^t + \mu t e^t + x + 2$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Exercice bonus

Déterminer les fonctions y et z vérifiant le système :

$$\begin{cases} y' - y = z \\ z' + z = 2y \end{cases}$$

Solutions : martinbroussard.fr