

Inégalités probabilistes (Exercices)

① Soit X telle que $\mathbb{E}(X) = V(X) = \lambda > 0$

a) Montrer $P(X \geq 2\lambda) \leq P[(X - \lambda + 1)^2 \geq (\lambda + 1)^2]$

$$X \geq 2\lambda \Leftrightarrow X - \lambda + 1 \geq \lambda + 1 \Rightarrow (X - \lambda + 1)^2 \geq (\lambda + 1)^2$$

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) - \lambda + 1 \geq \lambda + 1\} \subset \{\omega \in \Omega \mid (X(\omega) - \lambda + 1)^2 \geq (\lambda + 1)^2\}$$

b) En déduire $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda + 1}$

Markov $P(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}$ Y à valeurs ≥ 0

$$P[(X - \lambda + 1)^2 \geq (\lambda + 1)^2] \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \lambda + 1)^2]}{(\lambda + 1)^2} = \frac{\lambda + 1}{(\lambda + 1)^2} = \frac{1}{\lambda + 1}$$

$$\mathbb{E}[(X - \lambda + 1)^2] = \mathbb{E}[(X - \lambda + 1)^2] = \mathbb{E}[(X - \lambda)^2 + 2(X - \lambda) + 1]$$

$$= V(X) = \lambda \rightarrow \mathbb{E}[(X - \lambda)^2] + 2(\mathbb{E}(X) - \lambda) + 1 = \lambda + 1$$

② Soit $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*$

$$\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2) \mathbb{E}(Y^2)}$$

Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} \frac{1}{x} P(X=x)$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$$

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{P(X=x)}$$

$$b_x = \sqrt{x} \sqrt{P(X=x)}$$

$$\text{CS : } \sum_{x \in X(\Omega)} a_x b_x \leq \sqrt{\sum_{x \in X(\Omega)} a_x^2} \sqrt{\sum_{x \in X(\Omega)} b_x^2}$$

$$1 = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) \leq \sqrt{\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)} \sqrt{\mathbb{E}(X)}$$

Exercice bonus

Soit A et B deux événements, montrer que :

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$$

Solutions : martintraussard.fr