

Nombres complexes

Propriétés de $\mathbb{C}$

① $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

② $\exists i \in \mathbb{C} : i^2 = -1$

③ $\forall z \in \mathbb{C}, \exists! (a, b) \in \mathbb{R}^2 : z = a + ib$

④ $+$ et $\times$ sont soumises aux mêmes règles que dans $\mathbb{R}$

Associativité $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ idem $\times$

Commutativité $z + z' = z' + z$ idem $\times$

Distributivité $z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''$

Formules utiles

$$z = a + ib$$

$$z' = a' + ib'$$

Conjugué : $\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{z z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

Module : $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$

$$|z z'| = |z| \times |z'|$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Relation fondamentale : $z \bar{z} = |z|^2$

Inverse : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$$a \cos x + b \sin x \\ = \sqrt{a^2 + b^2} (\dots)$$

Formes trigonométrique et exponentielle

$$\exists (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : z = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$$

$$\exists ! (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi] :$$

//

mes. principale

$\equiv$

Propriétés

$$e^{i(\theta + \theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

Euler

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Moiné

$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$$

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^n)$$

$$\sin(n\theta) = \operatorname{Im}((\cos \theta + i \sin \theta)^n)$$

Identification de nombres complexes

Forme algébrique

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

Forme trigonométrique

$$r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' [2\pi] \end{cases}$$

Argument

$$\arg(z z') \equiv \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi]$$

Linéarisation $\cos^m x \sin^m x \longrightarrow \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \dots$

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{1}{16} \left(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix} \right) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x)\end{aligned}$$

Dé-linéarisation

$$\begin{aligned}\cos 4x &= \operatorname{Re}(\cos x + i \sin x)^4 \\ &= \operatorname{Re}(\cos^4 + 4i \cos^3 \sin - 6 \cos^2 \sin^2 - 4i \cos^3 \sin + \sin^4) \\ &= \cos^4(x) - 6 \cos^2(x) \sin^2(x) + \sin^4(x) \quad \sin^2 = 1 - \cos^2 \\ &= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1\end{aligned}$$

À vous de jouer!

① Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = |z'| = 1$. Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$

② Déterminer $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |1-z|$

③ Transformer $\sin^5(x)$ et $\sin(5x)$