

Complexes et géométrie

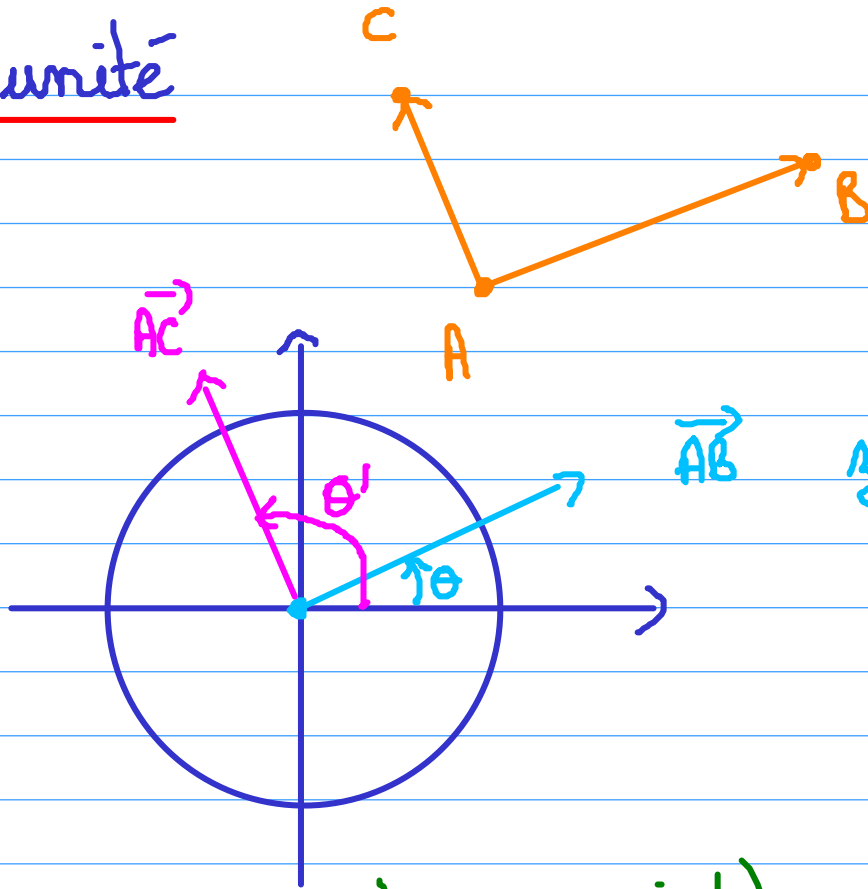
bijection $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$

Identification entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{C}$
Coordonnées (x, y)	Affixe $z = x + iy$
Vecteur $\overrightarrow{AB}$	Affixe $z_B - z_A$
Distance AB	Module $ z_B - z_A $
Angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$	Argument $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

Retour au cercle unité

$$z_C - z_A = r_2 e^{i\theta'}$$



$$z_B - z_A = r_1 e^{i\theta}$$

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \theta' - \theta = \arg\left(\frac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$$

Quelques résultats intéressants

Alignement : A, B, C alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0 [\pi]$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0 [\pi] \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$$

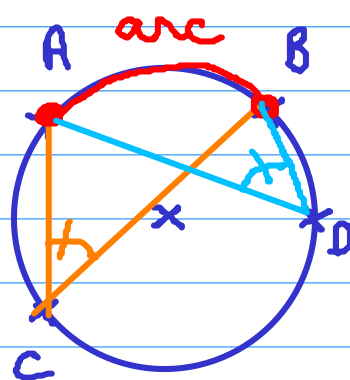
orthogonalité : $(AB) \perp (AC) \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$ (im. purs)

Cocyclicité : A, B, C et D sur un même cercle

Angle inscrit $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) [\pi]$

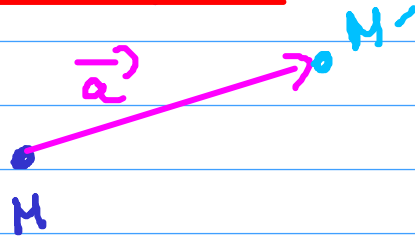
$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \equiv \arg\left(\frac{b-d}{a-d}\right) [\pi] \Leftrightarrow \frac{b-c}{a-c} \times \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}$$

γ γ'



Transformations du plan

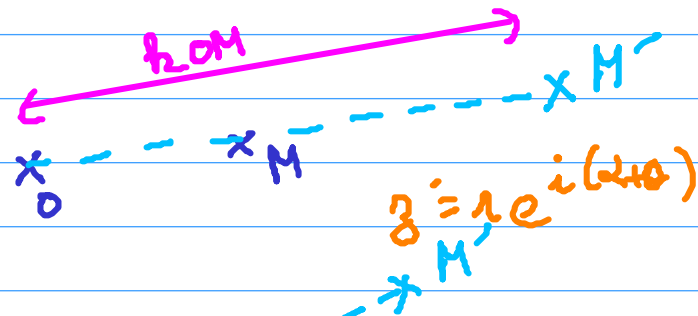
Translation



a affine de $\vec{a}$

$$z \mapsto z + a$$

Homothétie de centre 0



$$z \mapsto \underline{k} z$$

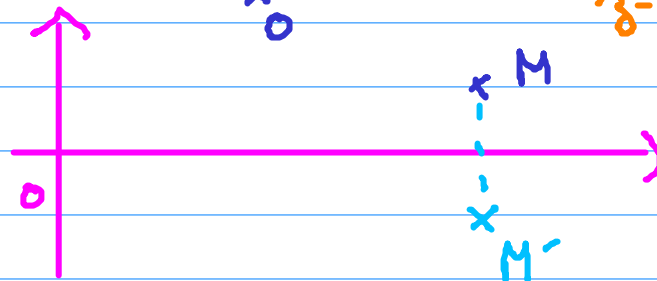
$k \in \mathbb{R}$

Rotation de centre 0



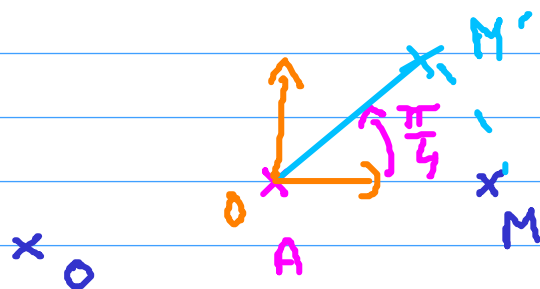
$$z \mapsto ze^{i\theta}$$

Symétrie axiale (abscisses)



$$z \mapsto \overline{z}$$

Rotations / homothéties / symétries



Ex : Rot. de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$

$$z' - a = e^{i\frac{\pi}{4}} (z - a)$$

$$z' = e^{i\frac{\pi}{4}} (z - a) + a$$

Transformation $z \mapsto az + b$ $a, b \in \mathbb{C}$

$$a = r e^{i\theta}$$

$$z \mapsto r e^{i\theta} z + b$$

$$z \mapsto e^{i\theta} z \mapsto r e^{i\theta} z \mapsto r e^{i\theta} z + b$$

rot. / o

hom. / o

tran.

À vous de jouer !

① Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle au point d'affixe z^3 .

② Déterminer l'expression de : $z \mapsto \dots z + \dots$

a) la rotation de centre $A(1, -1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

b) l'homothétie de centre $A(2, 3)$ et de rapport -3

c) la symétrie axiale par rapport à la droite $x = 1$