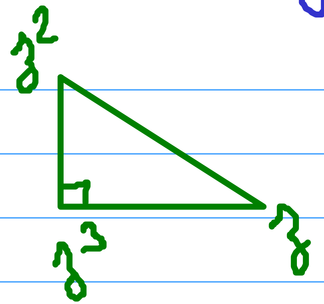
Complexes et géométrie (Exercices)

① Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle au point d'affixe z^3.



Pythagore : $|z^3 - z^2|^2 + |z^3 - z|^2 = |z^2 - z|^2$

$\Leftrightarrow |z|^2 |z^2 - z|^2 + |z|^2 |z^2 - 1|^2 = |z|^2 |z - 1|^2$

$|ab| = |a||b|$

$z \neq 0$

$\Leftrightarrow |z^2 - z|^2 + |z^2 - 1|^2 = |z - 1|^2$

$z \longmapsto az + b$

$\Leftrightarrow |z|^2 \underline{|z - 1|^2} + \underline{|z-1|^2} |z+1|^2 = \underline{|z - 1|^2}$

$1, z, z^2$ tr. rect. en z^2

$z \neq 1$

$\Leftrightarrow |z|^2 + |z + 1|^2 = 1$

$z = x + iy$

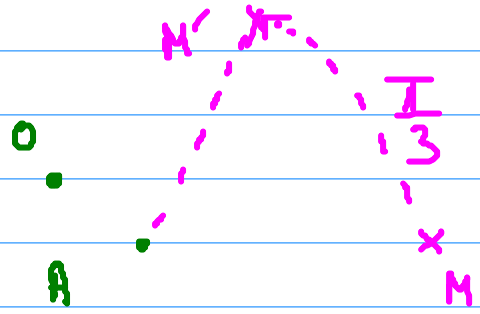
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ Cercle centre $\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$, rayon $\frac{1}{2}$

② Déterminer l'expression de :

a) la rotation de centre $A(1,-1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$



$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \frac{\pi}{3} \\ AM' = AM \end{cases} \qquad z' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-a)$$

$$z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-a) + a = e^{i\frac{\pi}{3}} z + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) a$$

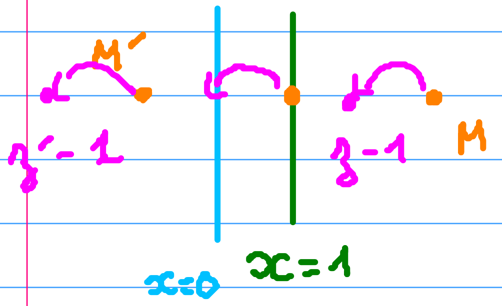
$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} i\right)$$

b) l'homothétie de centre $A(2,3)$ et de rapport -3

$$\overrightarrow{AM'} = -3\overrightarrow{AM} \qquad z' - a = -3(z-a) = -3z + 3a$$

$$z' = -3z + 4a = -3z + 8 + 12i$$

c) la symétrie axiale par rapport à la droite $x = 1$

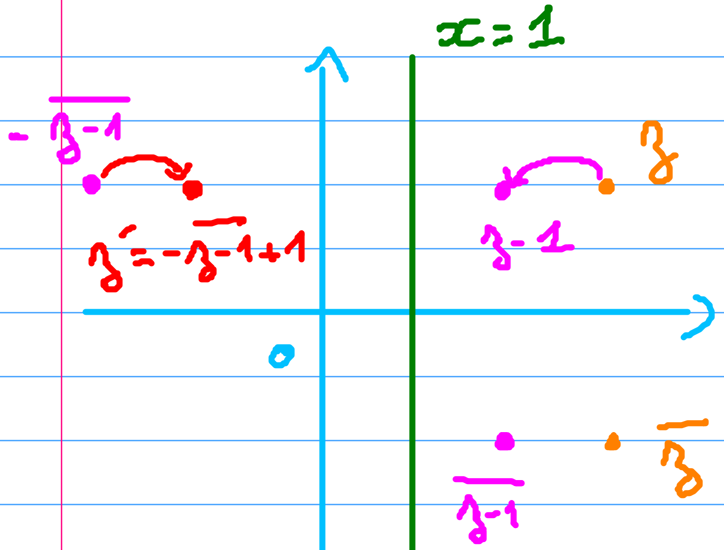


$Re(z') - 1$

$$\begin{cases} Re(z' - 1) = -Re(z - 1) = -Re(z) + 1 \Rightarrow Re(z') = 2 - Re(z) \\ Im(z') = Im(z) \end{cases}$$

$z = a + ib$

$$z' = 2 - a + ib = 2 - (a - ib) = 2 - \bar{z}$$



$$z' = -\overline{z-1} + 1 = -(\bar{z} - 1) + 1$$
$$= 2 - \bar{z}$$

Exercice bonus

Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que z et ses racines carrées forment un triangle équilatéral.

Solutions : martintraussard.fr