Fonctions hyperboliques réciproques

Rappel : Fonctions hyperboliques

$$\mathrm{ch} : x \longmapsto \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$\mathbb{R}_+$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}\, x$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$[1,+\infty[$

$$\mathrm{sh} : x \longmapsto \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$\mathrm{sh}\, x$	$-\infty$	↗	$+\infty$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

$$\mathrm{th} : x \longmapsto \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$\mathrm{th}\, x$	-1	↗	1

$\mathbb{R}$

$]-1,1[$

acosh

$\underline{\text{Argch}}$ $\quad \overset{f}{ch} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1,+\infty[$ bijective $\quad \overset{f^{-1}}{argch} : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$

$\left(\begin{array}{c} f \text{ dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{array} \right) \Rightarrow f^{-1}$ dérivable en $b = f(a)$ et $f^{-1\,\prime}(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

$a = f^{-1}(b)$

$ch'(a) = 0 \Leftrightarrow sh(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \qquad b = ch(a) = 1$

argch dériv / $]1,+\infty[$ et $\forall y > 1$, $argch'(y) = \dfrac{1}{sh(argch(y))}$

$ch^2 \dots - sh^2 \dots = 1 \Leftrightarrow sh^2 \dots = ch^2 \dots - 1 \qquad argch(y) > 0 \Rightarrow sh(argch\, y) > 0$

$\Rightarrow sh(argch\, y) = \sqrt{sh^2(argch\, y)} = \sqrt{ch^2(argch\, y) - 1} = \sqrt{y^2 - 1}$

$$\boxed{argch'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}} \qquad \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Argsh $\quad \overset{f}{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective $\qquad \overset{f^{-1}}{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$sh'(a) = 0 \iff ch(a) = 0 \iff a \in \emptyset \qquad$ argsh dériv. $|\, \mathbb{R}$

$$argsh'(y) = \frac{1}{ch(argsh(y))} = \frac{1}{\sqrt{ch^2(\ldots)}} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2(argsh\, y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Argth $\quad th : \mathbb{R} \to]-1,1[$ bijective $\qquad argth :]-1,1[\to \mathbb{R}$

$th'(a) = 0 \iff \dfrac{1}{ch^2(a)} = 0 \iff a \in \emptyset \qquad$ arg th dér $|\,]-1,1[$

$$argth(y) = \frac{1}{th'(argth\, y)} = \frac{1}{1 - th^2(argth\, y)} = \frac{1}{1-y^2} \qquad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Expressions logarithmiques

$\operatorname{argch} : [1 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$

$y \in [1, +\infty[$

$\underbrace{x}_{\geq 0} = \operatorname{argch}(y) \iff y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

$\iff e^{x} - 2y + e^{-x} = 0$

$\iff e^{2x} - 2y\, e^{x} + 1 = 0$

$\iff X^2 - 2yX + 1 = 0$ où $X = e^{x}$

$\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1) \geq 0$ $\quad X = \dfrac{2y \pm 2\sqrt{y^2-1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2-1}$

$x \geq 0$ $\quad e^{x} = X \geq 1$ et $y - \sqrt{y^2-1} \leq 1$ $\quad X = y + \sqrt{y^2-1}$

$$x = \operatorname{argch}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

Méthode par dérivation - intégration

$\text{argth} :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$\text{argth}'(x) = \frac{1 + 0x}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{(a-b)x + (a+b)}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

$\frac{1}{1+x} \longrightarrow \ln|1+x| = \ln(1+x)$

$\frac{1}{1-x} \longrightarrow -\ln|1-x| = -\ln(1-x)$

$$\text{argth}(x) = \frac{1}{2}\left(-\ln(1-x) + \ln(1+x)\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C$$

$\text{argth}(0) = 0 \Longrightarrow C = 0$

$$\boxed{\text{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

À vous de jouer !

① Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\operatorname{argch} x + \operatorname{argsh} x = 1$$

② Simplifier :

a) $\operatorname{argch}\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}\right)$

b) $\operatorname{argth}\left(\dfrac{1+2\operatorname{th} x}{2+\operatorname{th} x}\right)$