

Immersion de matrices

Matrices inversibles

$$A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ inversible} \Leftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{R}) : AB = BA = I_n$$

B: inverse de A

$$B = A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Propriétés

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$\underline{AA^{-1}} = \underline{A^{-1}A} = \underline{I_2}$$

$$A, B \text{ inversibles} \Rightarrow AB \text{ inversible et } (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$AB \times B^{-1} A^{-1} = AA^{-1} = I_2$$

Déterminant

$$\underline{n=1} \quad A = (a)$$

$$\det(A) = a$$

$$\underline{n=2} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a \times d - b \times c \quad \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$$

$$\underline{n=3} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \oplus a \times (ei - hf) \ominus b \times (di - gf) \oplus c (dh - ge)$$

Propriété fondamentale

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Inversion de matrices 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$$

Comatrice : Matrice des déterminants partiels

$$C = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t C = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad {}^t C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det A = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversion de matrices 3x3

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t C$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

$$\det(A) = -0 \times \underbrace{(2 \times 0 - 6 \times 3)}_{-18} + 1 \times \underbrace{(1 \times 0 - 5 \times 3)}_{-15} - 4 \times \underbrace{(1 \times 6 - 5 \times 2)}_{-4} = 1$$

$$C = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^t C = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

(car $\det(A) = 1$)

À vous de jouer!

① Inverser

a) $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

② Déterminer $x \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{pmatrix}$
soit inversible.