

Matrices et systèmes d'équations

Écriture matricielle d'un système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ dx + ey \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ dx + ey \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{AX} = B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

si A inversible

Résolution dans des cas simples ($n=2$ ou 3)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 7y = 4 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -14 - 3 = -17$$

$$\text{Comatrice} \quad C = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \quad {}^t C = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t C = \frac{1}{-17} \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-17} \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{-17} \begin{pmatrix} -47 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{47}{17} \\ \frac{3}{17} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \end{matrix}$$

Opérations élémentaires

- ① Ajouter à une ligne un multiple d'une autre $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
- ② Multiplier une ligne par un réel non nul $L_i \leftarrow \alpha L_i$
- ③ Échanger deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} L_2 \leftarrow 3L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Pivot de Gauss (Systèmes)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 8 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} -2L_1 \\ -4L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -13 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

$$+L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & -15 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ 4x + y + 8z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y = -13 \\ -z = -15 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -27 \\ y = -13 \\ z = 15 \end{cases}$$

Pivot de Gauss (matrices)

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A

$$\begin{matrix} -2L_1 \\ -4L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & | & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & | & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-2L_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

I_3

A^{-1}

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

À vous de jouer !

① Résoudre

$$\begin{cases} -x + 2y + z - t = 2 \\ x - y - z + 2t = 3 \\ -x + y + z + t = 4 \\ -2x + 5y + z - 2t = 6 \end{cases}$$

② Inverser

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$