

Dénombrement

Cardinal E un ensemble quelconque

E fini $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \exists f : \{1, \dots, m\} \rightarrow E$ bijective

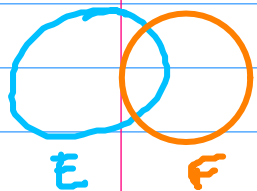
$$m = \text{Card}(E) = |E|$$

Règles de calcul

$$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$$

$$E \cap F = \emptyset$$

$$= \text{card}(E) + \text{card}(F)$$



$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$$

$$\begin{array}{r} E \setminus F \quad \dots \\ n : \hline m \times m \end{array}$$

$$\text{card}(E \setminus F) = \text{card}(E) - \text{card}(E \cap F)$$

E fini $\text{card}(E) = n$

$E = \{1, 2, \dots, 9\}$

Permutations (bijections $E \rightarrow E$)

$$n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$$

$$\begin{array}{c} 12 \\ \hline 21 \\ \hline 2! \end{array} \quad \begin{array}{c} 123 \\ 132 \\ 213 \\ 231 \\ 312 \\ 321 \end{array} \Bigg) 6 = 3!$$

Listes et combinaisons

$$r \leq n$$

r-listes (Ordre, remise)

$$\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{r \text{ choix}} = n^r$$

$r = 4$
 $(1, 2, 3, 4)$ $(1, 2, 4, 3)$
 $(1, 1, 1, 9)$

Arrangements (Ordre, ~~remise~~)

$$\underbrace{n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)}_{r \text{ choix}} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$(1, 2, 3, 4)$
 $(1, 2, 4, 3)$
 ~~$(1, 1, 1, 9)$~~

Sous-ensemble de p éléments

Combinaisons (~~Ordre~~, remise)

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 2, 1\}$$

$$\frac{\# \text{ arrangements}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p! (n-p)!} = \binom{n}{p}$$

Combinaisons avec répétitions (~~Ordre~~, remise)

$$\begin{matrix} \infty & & \infty \\ \textcircled{1} & & \textcircled{2} \\ \infty & m=4 & \textcircled{3} \\ & & \textcircled{4} \end{matrix}$$

$$[1, 1, 2, 3] = [1, 1, 3, 2]$$

$p=10$ fleurs

$$\underbrace{***}_{\textcircled{1}} \mid \underbrace{****}_{\textcircled{2}} \mid \underbrace{***}_{\textcircled{3}} \mid \underbrace{}_{\textcircled{4}}$$

$$[1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3]$$

$$\underbrace{\textcircled{1}} \mid \underbrace{\textcircled{2}} \mid \underbrace{\textcircled{3}} \mid \underbrace{*****}_{\textcircled{4}}$$

$$[4, \dots, 4]$$

$$\binom{n+p-1}{n-1} = \binom{n+p-1}{p}$$

Dénominateur et coefficients binomiaux

Exemple : Formule de Vandermonde

$$\binom{N+M}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{N}{k} \binom{M}{m-k}$$

Preuve combinatoire

$$\text{card}(E) = N$$

$$\text{card}(F) = M$$

$$E \cap F = \emptyset$$

n éléments dans EUF : $\binom{N+M}{n}$

$0 \leq k \leq N$: je choisis k éléments dans E $\binom{N}{k}$
 _____ $n-k$ _____ F $\binom{M}{n-k}$

À vous de jouer !

① Soit $E = \{1, \dots, n+1\}$ $p \leq n$

a) Combien de façons de choisir $p+1$ éléments dans E ?

b) Soit $0 \leq k \leq n$. Combien de façons de choisir p éléments distincts dans $\{1, \dots, k\}$?

c) Démontrer :
$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$$

② Combien y a-t-il :

a) d'injections de $\{1, \dots, 9\}$ dans $\{1, \dots, 10\}$?

b) de surjections de $\{1, \dots, 10\}$ dans $\{1, \dots, 9\}$?