

Dénombrement (Exercices)

① Soit $E = \{1, \dots, n+1\}$ $p \leq n$

a) Combien de façons de choisir $p+1$ éléments dans E ?

$$\binom{n+1}{p+1}$$

b) Soit $0 \leq k \leq n$. Combien de façons de choisir p éléments distincts dans $\{1, \dots, k\}$?

$k < p$ impossible

$$k \geq p \quad \binom{k}{p}$$

$$E = \{1, \dots, n+1\}$$

c) Dédurre :

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$$

$\nearrow$
(p+1) éléments
dans E

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{p \text{ éléments dans } \{1, \dots, k\}}$

Plus grand
élément

$$\left[\begin{array}{ccc} n+1 & \text{p éléments dans } \{1, \dots, n\} & \binom{n}{p} \\ n & \text{p éléments dans } \{1, \dots, n-1\} & \binom{n-1}{p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p+1 & \text{p éléments dans } \{1, \dots, p\} & \binom{p}{p} \end{array} \right]$$

② Combien y a-t-il :

a) d'injections de $\{1, \dots, \underline{9}\}$ dans $\{1, \dots, \underline{10}\}$?

$f(1)$: 10 possibilités

$f(2)$: 9 "

$f(3)$: 8 "
:

$f(9)$: 2 "

$$10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 2 = \frac{10!}{1!}$$

Généralisation

$$\{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, p\} \quad m \leq p$$

$$\frac{p!}{(p-m)!} \quad (\text{arrangements})$$

b) de surjections de $\{1, \dots, 10\}$ dans $\{1, \dots, 9\}$?

$$\forall m \in \{1, \dots, 9\}, \exists n \in \{1, \dots, 10\} : f(n) = m \quad (\text{surj.})$$

Un élément de $\{1, \dots, 9\}$ a deux antécédents

↳ 3 possibilités

Choix des antécédents $\rightarrow \binom{10}{2}$ possibilités

Appariements entre les 8 restants de $\{1, \dots, 10\}$ $\rightarrow$ $8!$ poss.

$$3 \times \binom{10}{2} \times 8! = 3 \times \frac{10!}{8! 2!} \times 8! = \frac{3 \times 10!}{2}$$

Exercice bonus Soit $n \in \mathbb{N}$.

Trouver le nombre de surjections de $\{1, \dots, n+1\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Solutions : martinroussard.fr