

Probalilitēs

Espaces probabilisés

Ensemble E

Univers Ω

Élément e

Issue ω

Sous-ensemble F

Événement A

$\rightarrow E$

$\rightarrow$ Événement certain

$\rightarrow \emptyset$

$\rightarrow$ ——— impossible

Complémentaire

——— contraire

Ensembles disjoints

——— incompatibles

Ω fini

ens. des événements

Probabilités

$$P: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

$$① P(\Omega) = 1$$

$$② A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Propriétés

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\Omega = A \cup \bar{A}$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$P(\emptyset) = 0$$



$$P(A \cup B) = \underbrace{P(A \setminus B)} + P(A \cap B) + \underbrace{P(B \setminus A)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

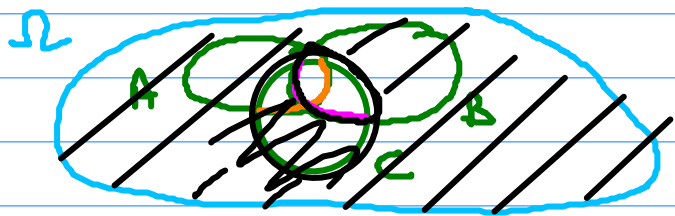
$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$$

Probabilités conditionnelles

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



$P_B : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ est une probabilité



$$(P_B)_c = P_{B^c}$$

Indépendance : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

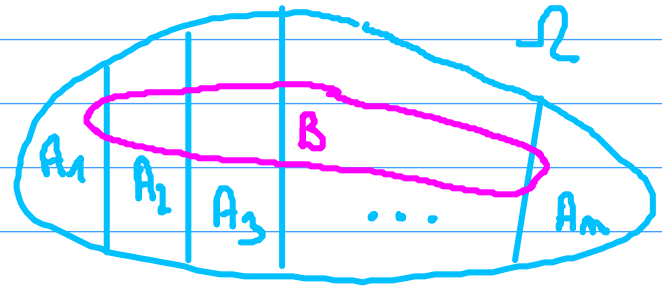
Probabilités totales

Système complet d'événements

$$A_1, \dots, A_m \subset \Omega$$

$$\textcircled{1} \quad \forall 1 \leq i < j \leq m, A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$\textcircled{2} \quad \bigcup_{i=1}^m A_i = \Omega$$



Formule des probabilités totales

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^m (B \cap A_i)\right)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^m P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^m P(A_i) P_{A_i}(B)$$

À vous de jouer!

① Soit $A_1, \dots, A_m$. Montrer que

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_m) \geq \left(\sum_{i=1}^m P(A_i) \right) - (m-1)$$

② On considère une pièce truquée (probabilité p de faire "Pile").
On lance la pièce jusqu'à ce que deux lancers consécutifs
soient différents.

Probabilité que le dernier lancer soit un pile?