

Probabilities (Exercises)

① Soit $A_1, \dots, A_m$. Montrer que

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_m) \geq \left(\sum_{i=1}^m P(A_i) \right) - (m-1)$$

$m=1$ $P(A_1) \geq P(A_1) - 0$

$m=2$ $P(A_1 \cap A_2) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1 \iff 1 \geq P(A_1 \cup A_2)$ Vrai

Hérédité $m \geq 2$ $A = A_1 \cap \dots \cap A_m$ $B = A_{m+1}$

$$P(A_1 \cap \dots \cap \underline{A_{m+1}}) = P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

$$P(A) \geq \sum_{i=1}^m P(A_i) - (m-1)$$

$$\geq \left(\sum_{i=1}^m P(A_i) \right) - (m-1) + P(A_{m+1}) - 1$$

$$\geq \left(\sum_{i=1}^{\underline{m+1}} P(A_i) \right) - [\underline{m+1} - 1]$$

②

On considère une pièce truquée (probabilité p de faire "Pile").
On lance la pièce jusqu'à ce que deux lancers consécutifs
soient différents. Probabilité que le dernier lancer soit pile ?

PF, FP, PPF, FFP, PPPF, FFFP, PPPPF, FFFFP,
SCE = 2 lancers
3 lancers
⋮
n lancers
⋮

$$P(DLP) = P(2 \text{ lancers} \cap DLP) + P(3L \cap DLP) + \dots + P(nL \cap DLP) + \dots$$

$$= \sum_{k=2}^n P(\underbrace{--(k-2)F}_{p \times (1-p)} \underbrace{--FP}_{p(1-p)^2}) = \sum_{k=2}^n p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=2}^n (1-p)^{k-1}$$

$$= p \sum_{k=0}^{n-2} (1-p)^{k+1} = p(1-p) \sum_{k=0}^{n-2} (1-p)^k = \cancel{p(1-p)} \frac{1 - (1-p)^{n-1}}{\underbrace{1 - (1-p)}_p}$$

$$= (1-p) \left[1 - \underbrace{(1-p)^{n-1}}_{\rightarrow 0} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1-p$$

Exercice bonus

On lance n fois un dé équilibré. (6 faces)

Quelle est la plus petite valeur de n permettant d'obtenir un 6 avec 90% de chance sur les n lancers ?

Solutions : martintraussard.fr