

Variables aléatoires

univers (fini)

Variables aléatoires

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$X(\Omega)$: ens. des valeurs prises par X

$$X(\omega) = 3 \Leftrightarrow \omega \in \{(1,2), (2,1)\}$$

Exemple: Lancer de deux dés $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), \dots\}$

X = somme des deux dés

$$X(1,6) = 7$$

$$X(\Omega) = \{2, 3, \dots, 12\}$$

Probabilités: $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$

$$P(X=x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}) = P(\underbrace{X^{-1}(\{x\})}_{\in \mathcal{P}(\Omega)})$$

$$P(X \in A) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}) = P(X^{-1}(A))$$

Loi de probabilité: $X(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$

$$x \longmapsto P(X=x)$$



Espérance $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \underline{x} P(X=x)$

Propriétés linéarité $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

croissance $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega) \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

Théorème de transfert $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \underline{f(x)} P(X=x)$

$\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} X^{-1}(\{x\})$

$$\begin{aligned} E(f(X)) &= \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega)) P(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \left[\sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} \underbrace{f(X(\omega))}_x P(\{\omega\}) \right] \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \left[\sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} P(\{\omega\}) \right] P(X=x) \end{aligned}$$

$X - \mathbb{E}(X)$: centrée

Variance $V(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] \geq 0$

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= \mathbb{E}[(aX+b - (a\mathbb{E}(X)+b))^2] = \mathbb{E}[(a(X - \mathbb{E}(X)))^2] \\ &= a^2 \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = a^2 V(X) \end{aligned}$$

Covariance $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= \mathbb{E}((X+Y)^2) - (\mathbb{E}(X+Y))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)^2 \\ &= V(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + V(Y) \end{aligned}$$

À vous de jouer !

① Soit $X: \Omega \rightarrow \{1, \dots, n\}$

Montrer que $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$

② Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$

tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, P(X=i) = P(Y=i) = \frac{1}{n}$ (uniforme)
 $n=6$

On suppose $\forall 1 \leq i, j \leq n$, $(X=i)$ et $(Y=j)$ indépendants

Donner la loi de probabilité de $X+Y$.