

Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ v.a. positive

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Preuve: $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$E = \sum x_i P(X=x_i)$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ 0 \leq x < a}} x P(X=x)}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} x P(X=x)}_{\geq a \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} P(X=x)}$$

$$E(X) \geq a \left(\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geq a}} P(X=x) \right) = P(X \geq a)$$

$$E(X) \geq a P(X \geq a)$$

Inégalité de Bienaymé - Tchebychev

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Preuve: Markov $\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}$

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \quad Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$$

$$\mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq a^2) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

$$(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq a^2 \Leftrightarrow |X - \mathbb{E}(X)| \geq a$$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\dots)$$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

Rappel :

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

En probabilités $\mathbb{E}(XY) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) Y(\omega) \underbrace{P(\{\omega\})}_{\geq 0}$

$$a_\omega = X(\omega) \sqrt{P(\{\omega\})}$$

$$b_\omega = Y(\omega) \sqrt{P(\{\omega\})}$$

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\sum_{\omega \in \Omega} X^2(\omega) P(\{\omega\})} \sqrt{\sum_{\omega \in \Omega} Y^2(\omega) P(\{\omega\})} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) \mathbb{E}(Y^2)}$$

À vous de jouer !

① Soit X telle que $\mathbb{E}(X) = V(X) = \lambda > 0$

a) Montrer $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \mathbb{P}[(X - \lambda + 1)^2 \geq (\lambda + 1)^2]$

b) En déduire $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda + 1}$

② Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*$

Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$